

SZERKEZETEK INDIFFERENS EGYENSÚLYI ÁLLAPOTBAN

Tarnai Tibor*

RÖVID KIVONAT

A dolgozat példákat ismertet a rugalmas stabilitáselméletben ritkán előforduló indifferens egyensúlyi állapotokra, ahol a szerkezet egyensúlyát biztosító teher értéke nem változik nagy elmozdulások mellett sem. A szerkezetek további külső erők nélkül tudják változtatni alakjukat, úgy viselkednek akár a mechanizmusok. Az első példa az egyensúlyi út elágazásával, a második példa a terheletlen, sajátfeszültségek alatti szerkezet átpattanásos stabilitásvesztésével kapcsolatos.

1. BEVEZETÉS

A stabilitáselméletből ismert, hogy egy konzervatív erőkkel terhelt, rugalmas anyagú, véges szabadságfokú szerkezet egyensúlyi helyzete *stabil*, ha a szerkezet teljes potenciális energiafüggvényének Hesse-mátrixa ebben a helyzetben pozitív definit (minden sajátértéke pozitív); *instabil*, ha a Hesse-mátrixnak van negatív sajátértéke; és *kritikus*, ha a Hesse-mátrix szinguláris [12]. A kritikus egyensúlyi helyzet infinitezimálisan kicsi elmozdulások feltételezése esetén azt is jelenti, hogy a vizsgált egyensúlyi helyzet infinitezimálisan kicsi környezetében vannak szomszédos helyzetek, amelyekben az adott erők az egyensúly fennáll. Eloffordulhatnak olyan esetek is, hogy nemcsak infinitezimális, hanem véges elmozdulások mellett is végtelen sok szomszédos egyensúlyi helyzet létezik. Ilyenkor az egyensúlyi helyzet *indifferens* (semleges). Ezt a különleges egyensúlyi helyzetet a stabilitáselméleti szerzők, mint pl. Halász [4], a vízszintes síkra helyezett golyó analógiájával szemléltetik. A golyót a síkon bárhová elmozdítva az egyensúlyban lesz.

Indifferens egyensúlyi helyzetben, a kritikus pontból leágazó másodlagos egyensúlyi út a teherparaméter és a jellemző elmozdulás koordinátarendszerében egy, az elmozdulási tengellyel párhuzamos egyenesként jelenik meg. A kritikus teher hatására a szerkezet úgy viselkedik, mint egy véges mechanizmus. További külső erők nélkül is véges elmozdulásokat tud végezni. A normál mechanizmusokkal ellentétben azonban a szerkezetben belső erők vannak jelen, amelyek a mozgás során folytonosan átrendeződnek. Eloffordulhat az is, hogy e viselkedés nem külső erők, hanem a szerkezet sajátfeszültségeinek a hatására alakul ki [5], [13].

A rugalmas szerkezetek indifferens egyensúlyi helyzetének létezésére több mint húsz évvel ezelőtt figyeltem fel. Az ehhez kapcsolódó eredményt azonban egy konferencia előadás [10] kivételével nem publikáltam. Időközben azonban e téma több

* okl. építőmérnök, az MTA rendes tagja, egyetemi tanár, BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

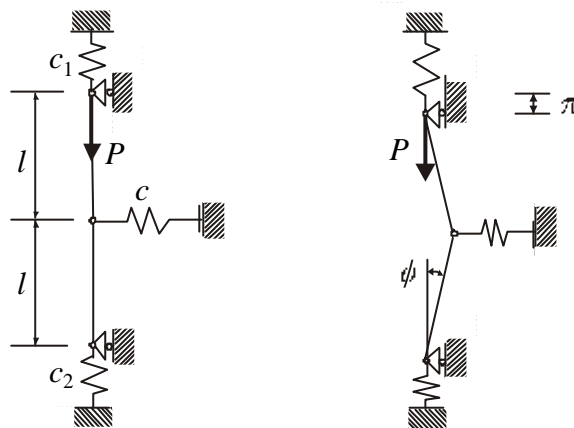
külföldi muhelyben is kutatás tárgya lett [6], [9], ezért úgy gondolom, hogy talán a hazai kutatók számára is érdekes lehet az a régi megfigyelés, és érdemes lesz azt bemutatnom ebben a dolgozatban néhány újabb eredmény kíséretében.

2. INDIFFERENS EGYENSÚLY

2.1. Külso teher hatására

Tekintsük az 1. ábrán feltüntetett, l hosszúságú súlytalan merev rudakból és c_1 , c_2 , c merevségű súlytalan lineáris rugókból álló csuklós szerkezetet, melyet a felső csuklóján egy P függőleges erő terhel. E két-szabadságfokú rúdszerkezet kihajlásakor a felső csukló függőlegesen u eltolódást szenved, a rudak pedig \mathbf{j} szöggel elfordulnak. Ekkor a szerkezet teljes potenciális energiája:

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1u^2 + \frac{1}{2}c_2(u + 2l \cos \mathbf{j} - 2l)^2 + \frac{1}{2}c(l \sin \mathbf{j})^2 - Pu. \quad (1)$$



1. ábra: A vizsgált rúdszerkezet és elmozdulásai.

Az egyensúly szükséges feltétele, hogy a ? teljes potenciál első variációja, és ebből következően mindkét első parciális deriváltja nulla legyen, azaz

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = c_1u + c_2(u + 2l \cos \mathbf{j} - 2l) - P = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{j}} = [-c_2 2l(u + 2l \cos \mathbf{j} - 2l) + cl^2 \cos \mathbf{j}] \sin \mathbf{j} = 0. \quad (3)$$

A (2) és (3) összefüggés az egyensúlyi utakat definiálja a P , u , \mathbf{j} koordináta-rendszerben. A (3) egyenlet kielégül, ha $\sin \mathbf{j} = 0$. Ebből kapjuk az elsődleges egyensúlyi út koordinátáinakra vett vetületi egyenleteit:

$$\mathbf{j} = 0, \quad P = (c_1 + c_2)u. \quad (4)$$

A (3) egyenlőség akkor is teljesül, ha (3)-ban a szögletes zárójelben szereplő kifejezés nulla. Ebből kapjuk a másodlagos egyensúlyi út koordinátáskokra vett vetületi egyenleteit:

$$u = 2l \left(1 - \cos \mathbf{j} + \frac{c}{4c_2} \cos \mathbf{j} \right), \quad (5)$$

$$P = 2l \frac{c_2 c}{4c_2 - c} - \frac{c_1 c - 4c_1 c_2 + c_2 c}{4c_2 - c} u, \quad (6)$$

$$P = 2c_1 l + \frac{l}{2c_2} (c_1 c - 4c_1 c_2 + c_2 c) \cos \mathbf{j}. \quad (7)$$

Az egyensúlyi utak pontjaiban az egyensúly stabilitásáról a teljes potenciál második deriváltjait tartalmazó \mathbf{H} Hesse-mátrix ad felvilágosítást. A Hesse-mátrix determinánsa:

$$\det \mathbf{H} = -l^2 (c_1 c - 4c_1 c_2 + c_2 c) \sin^2 \mathbf{j}. \quad (8)$$

Az elágazás a másodlagos egyensúlyi út $f = 0$ -hoz tartozó pontjában van. Itt (8) szerint $\det \mathbf{H} = 0$, azaz \mathbf{H} szinguláris, vagyis az elágazási pont kritikus, ahol a kritikus ero (7) alapján

$$P_{kr} = \frac{cl}{2} \left(1 + \frac{c_1}{c_2} \right). \quad (9)$$

A (9) kifejezés megmutatja a szerkezetnek azt a szokatlan, különleges tulajdonságát, mely szerint a többletkényszernek destabilizáló hatása lehet. A c_2 rugómerevség növelésével ugyanis a kritikus ero csökken.

A szerkezet másik különlegessége, hogy ha a rugómerevségekre fennáll, hogy

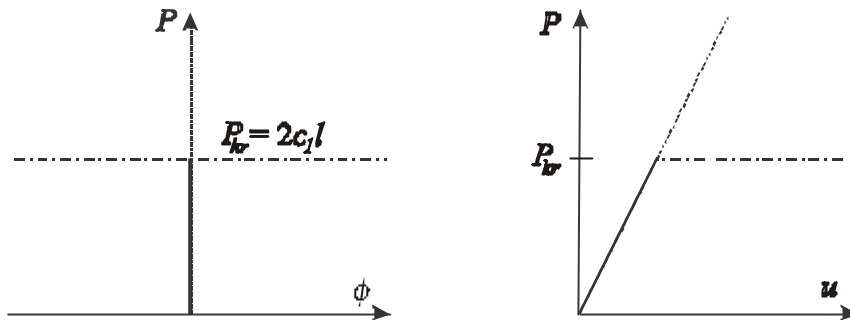
$$c_1 c - 4c_1 c_2 + c_2 c = 0, \quad (10)$$

akkor (6), (7)-ből következően, a másodlagos egyensúlyi út mentén a P ero állandó, függetlenül az u , ill. f elmozdulások értékeitől (2. ábra):

$$P = 2c_1 l, \quad (11)$$

és (8) következtében – minthogy $\det \mathbf{H} = 0$ – a másodlagos út minden pontjában az egyensúly kritikus. Azt kaptuk tehát, hogy a szerkezet indifferens egyensúlyi állapotban van. A teljes potenciál ekkor állandó: $\Pi = l^2 (c/2 - 2c_1)$. A szerkezet viselkedése hasonlít azokhoz a rugós asztali lámpákéhoz, amelyeket bármely helyzetbe kimozdítva

a lámpa a kimozdított helyzetben marad. E lámpáknál azonban a helyzet megtartása a súrlódásnak is köszönhető.



2. ábra: Az egyensúlyi út vetületei a P, f és a P, u síkon. A vastag folytonos vonal stabil, a szaggatott vonal instabil, az eredményvonal indifferens egyensúlyi állapotot jelez.

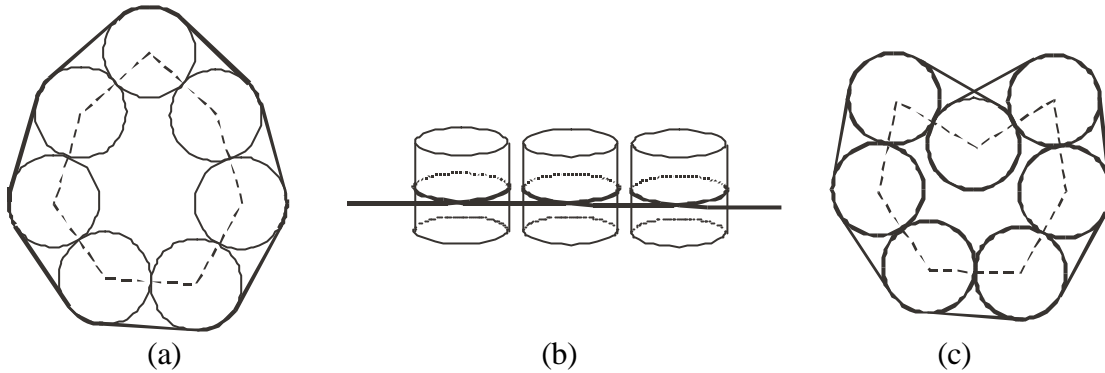
Ezt, az eredetileg [10]-ben bemutatott példát később Gáspár [3], [7] a destabilizáló hatás kizárása mellett egyszerűsítette.

2.2. Sajátfeszültség hatására

A bemutatandó szerkezet ötletét a lótusz receptákulumok egy lehetséges mechanikai modelljéből merítettük [11]. Tekintsük a síkban a 3(a) ábrán feltüntetett n egybevágó r sugarú merev korongot, melyeknek középpontjai egy szigorúan konvex n -szöget határoznak meg úgy, hogy valamennyi oldal hossza $2r$. Ez azt jelenti, hogy a szomszédos korongok érintik egymást, és a koronghalmaz konvex burkának kerületi hossza $2r(n + p)$. Helyezzünk e korongrendszer köré egy $L < 2r(n + p)$ hosszúságú EA keresztmetszeti merevségű zárt, lineárisan rugalmas kötélgyurut, mely a korongokat összefeszíti. Tételezzük fel, hogy a korongok egymáshoz és a kötélnél súrlódás nélkül csatlakoznak. Ekkor, mivel a korongok merevek, energia csak a kötélgyuru alakváltozásaiból származik. A rendszer teljes potenciális energiája tehát:

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} [2r(n+p) - L]^2. \quad (12)$$

Minthogy a konvex burok peremhossza nem változik, ha a korongrendszer alakját deformáljuk, miközben a korong középpontok továbbra is egy $2r$ oldalhosszú konvex n -szöget határoznak meg, a (12) teljes potenciál is változatlan marad. Ez azt jelenti, hogy a perem mentén megfeszített koronghalmaz indifferens egyensúlyi (sajátfeszültségi) állapotban van. Ez az állapot fennmarad mindaddig, amíg három szomszédos korong középpontja nem kerül egy egyenesbe. Ekkor ugyanis a koronghalmaz egyensúlya elveszti stabilitását, és a középső korong a korongok által meghatározott poligon belsejébe bepattan. Az itt leírt rendszer emlékeztet az előregyártott vasbetonhéjak utófeszítésének arra a módjára, ahol a feszítőhuzalokat gyuruirányban a fal külső konvex felületén helyezik el [1].



3. ábra: Feszített koronggyuru. (a) Konvex gyuru kívülról érinto feszítókötéll. (b) Korongokat egyszer körültekeró feszítókötél. (c) Konkáv gyuru (b) szerinti feszítókötéll.

A feszített korongrendszer stabilitásvesztése elkerülhető, ha a rugalmas kötelet minden korong körül, ugyanolyan irányban egyszer körültekerjük (3(b) ábra). Hasonlít ez ahhoz, ahogy az eukarióta DNS a sejtmagban feltekeredik a hiszton fehérjékre [2]. Ekkor a megnyúlt kötéll hossza: $2r[n + (n + 1)p]$, a rendszer teljes potenciálja pedig

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} [2r(n + (n + 1)p) - L]^2$$

állandó, azaz a rendszer egyensúlya indifferens. A sajátfeszültség alatt álló korongrendszer külső erők nélkül, szabadon deformálható. A 3(c) ábrán feltüntetett konkáv alakzat felvételének sincs akadálya. Ez egyúttal magyarázatul is szolgál arra, hogy hogyan lehet végrehajtani utófeszítést konkáv héjakon a fal külső felületén futó gyuruirányú feszítő huzalokkal [8].

3. KÖVETKEZTETÉSEK

A bemutatott példák elvi jelentőséggel bírnak. A valóságban egy szerkezet egyensúlya vagy stabil, vagy instabil. Harmadik lehetőség nincs. Ennek az az oka, hogy a valóságban mindig vannak a rendszerben kis kezdeti tökéletlenségek, zavarások, amelyek hatással lehetnek az egyensúly stabilitására. Az indifferens (semleges) egyensúlyi állapothoz is mindig található olyan kis zavarás, amely azt instabillá teszi. A rugalmas indifferens egyensúlyi állapot elvi létezése azonban mindenképpen érdekes, és több elméleti és gyakorlati következtetésre nyújt módot. Ilyen szerkezeteknél – mint ismeretes – kezdeti zavarásokkal tetszőleges katasztrófa típusok is előállíthatók [3], [7]. A sajátfeszültségek alatt mechanizmusként viselkedő vékony héjaknak az urkutatóásban lehet alkalmazásuk [6]. A 2.2 pontban ismertetett példa az utófeszítésre adhat ötleteket.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatás az OTKA támogatásával, a T031931 és T037880 számú projektek keretében történt.

HIVATKOZÁSOK

- [1] Bölcseki E., Orosz Á.: *Vasbeton szerkezetek: Héjak*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
- [2] Calladine, C.R. and Drew, H.R.: *Understanding DNA: The Molecule & How It Works*, Academic Press, London, 1992.
- [3] Gáspár, Zs.: Buckling model for a degenerated case, *News Letter*, Technical University of Budapest, 2, No. 4 (1984), pp. 5-8.
- [4] Halász O.: *Acélszerkezetek III/1. Stabilitáselmélet*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- [5] Hegedus I.: Contribution to Gáspár's paper: Buckling model for a degenerated case, *News Letter*, Technical University of Budapest, 4, No. 1 (1986), pp. 8-9.
- [6] Kebabze, E., Guest, S.D. and Pellegrino, S.: A zero stiffness shell structure. *Manuscript*, Department of Engineering, University of Cambridge, 2001.
- [7] Kollár L. (szerk.): *A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991, pp. 21, 22 és 239-241.
- [8] Lee, H.H. and Kawaguchi, K.: An application of precast prestress shell structure system, *IASS Symposium*, Nagoya, 2001, CD-ROM, TP 139.
- [9] Mang, H.A. and Schranz, C.: Modes of transition from imperfection sensitivity to insensitivity of thin, elastic structures, *Preprint*, Institute for Strength of Materials, Vienna University of Technology, 2001.
- [10] Tarnai, T.: Destabilizing effect of additional restraint on elastic structures. Lecture at *EUROMECH Colloquium No. 128. on "Stability, buckling and postbuckling behaviour; foundations and analysis"*. Delft, The Netherlands, March 31 – April 2, 1980.
- [11] Tarnai, T.: Mechanical model of the pattern formation of lotus receptacles, *Int. J. Solids Structures* 38 (2001), pp. 2161-2170.
- [12] Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W.: *A General Theory of Elastic Stability*, Wiley, London, 1973.
- [13] Thomson, W. and Tait, P.G.: *Treatise on Natural Philosophy*, Vol. I., Part II., University Press, Cambridge, 1883, pp. 162-164.